D M I
AP2: Deuxième Année Cycle Préparatoire
Analyse 3: Espace Vectoriels Normés

ENSA D'AL-HOCEIMA
Année 2020/2021
S 3

Série n° 2

– Espace Vectoriels Normés –

Exercice 1

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses avec la justificatin:

1· Si (E, N) est un espace vectoriel normé, $x \in E, r > 0$, et $B(x, r)$ est la boule de centre x et de rayon $r > 0$, alors pour tout $\lambda > 0$, $\quad \lambda B(x, r) = B(x, \lambda r)$.

2· $N : (x, y) \longmapsto |5x + 3y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

3· Soit $E = \mathbb{R}_1[x]$, Alors $N : P \longmapsto |P(0)| + |P(1)|$ est une norme sur E.

4· Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E, et si on note $B_1 = \{x \in E, N_1 \leq 1\}$ et $B_1 = \{x \in E, N_2 \leq 1\}$, alors il existe $a, b > 0$ tels que $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.

5· Soit (U_n) une suite de l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ et soit $\ell \in E$. Alors (U_n) converge vers ℓ si et seulement si $(\|U_n - \ell)$ tend vers 0.

Exercice 2

Soit $(E, \|.\|)$ une espace vectoriel normé.

1°) Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, On a.

$$\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|$$

En déduire que

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x + y\|, \|x - y\|)$$

2°) On suppose désormais que la norme est issue d'un produit Scalaire, Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, On a

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq (\|x + y\| + \|x - y\|)^2$$

En déduire que

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq \sqrt{2} \max(\|x + y\|, \|x - y\|)$$

Exercice 3

Dans $E = \mathbb{R}^n$ Montrer que $\|.\|_1, \quad \|.\|_2 \quad et \quad \|.\|_\infty$ des normes deus à deux équivalentes.

Exercice 4 (Proposition dans le cours).

L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ muni de la norme euclidienne est un espace vectoriel normé complet.

Exercice 5

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ dans valeurs $\mathbb{R}$, on définit $f \in E$.

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0, 1]\} \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

1°) Vérifier que $\|f\|_\infty$, et $\|f\|_1$ sont deux normes sur E.

2°)Montere que pour tout $f \in E, \quad \|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$

En utilisant la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, pouver que ces deux normes ne sont pas équivalentes.